Théorème : Soit $f \in C^0_c(\mathbb{R})$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.
Alors $(f * p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue à support compact, elle est $\underbrace{\text{uniformément continue sur } \mathbb{R}}_{\text{Théorème de Heine}}$:

Soit $\delta > 0$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\displaystyle\int_{|t|\geq\delta} p_n(t)\,dt \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|(f*p_n)(x) - f(x)| \overset{\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,dt = 1}{=} \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x-t) - f(x)]\, p_n(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_{|t|\geq\delta} \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} p_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{\leq \varepsilon} p_n(t)\,dt \quad \text{car } p_n(t) \geq 0$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,dt \longleftarrow \text{où } \|f\|_\infty < +\infty$$

$$= (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon.$$

Proposition : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$ et $p_n : t \mapsto \begin{cases} (1-t^2)^n / a_n & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Soit $\alpha \in \,]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

D'où : $\displaystyle\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\,dt = \frac{1}{a_n}\int_{|t|\geq\alpha} (1-t^2)^n\,dt = \frac{2}{a_n}\int_\alpha^1 (1-t^2)^n\,dt \leq \frac{2}{a_n}(1-\alpha^2)^n$ car $t \mapsto (1-t^2)^n$ est décroissante sur $[\alpha, 1]$ et $\alpha \in \,]0,1[$

$$\leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{car } \alpha \in \,]0,1[\Rightarrow |1-\alpha^2| < 1$$

De plus, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,dt = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ par définition.

Proposition : Soit f continue et nulle en dehors de $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * p_n$ est une fonction polynomiale.

Soit $x \in I$. Alors :

$$(f*p_n)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\, p_n(x-t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\, \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n}\,dt \longleftarrow \text{car } x, t \in I \Rightarrow |x-t| \leq 1$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k(t) x^k\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\alpha_k(t)\,dt \right) x^k$$

Théorème (Weierstrass). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,b]$.
Alors f est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Soit $c < a$ et $d > b$. On prolonge de manière continue f à $[c,d]$ par une fonction affine sur $[c,a]$ et $[b,d]$, et par 0 en dehors de $[c,d]$. Ainsi, f est continue à support compact.

$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \in [0,1] \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})(d-c) \in [0, d-c] \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})(d-c) + c \in [c,d]$

Soit $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [c,d] \\ x \longmapsto (x+\frac{1}{2})(d-c)+c \end{array}$. Alors ψ est affine, bijective, continue et $\psi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [c,d]$.

Alors, $f \circ \psi$ est continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et nulle en dehors. Par les résultats précédents, il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers $f \circ \psi$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ainsi, $(P_n \circ \psi^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers $f \circ \psi \circ \psi^{-1} = f$ sur $[c,d]$ donc en particulier sur $[a,b]$.